Københavns Universitet. Økonomisk Institut

**2. årsprøve 2014 S-2DM rx ret**

# Skriftlig eksamen i Dynamiske Modeller

**Fredag den 21. februar 2014**

**Rettevejledning**

---

**Opgave 1.** Vi betragter fjerdegradspolynomiet $P : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall z \in \mathbf{C} : P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4.$$

Desuden betragter vi differentialligningerne

$$(*) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + 10\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

og

$$(**) \qquad \frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^3x}{dt^3} + 10\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 4x = 90e^t.$$

(1) Vis, at tallene $\rho_1 = -1$ og $\rho_2 = -2$ er rødder i polynomiet $P$.

**Løsning.** Dette indses ved at indsætte tallene $\rho_1 = -1$ og $\rho_2 = -2$ i polynomiet $P$.

(2) Bestem samtlige rødder i polynomiet $P$.

**Løsning.** Ved at benytte polynomiers division finder vi, at

$$\forall z \in \mathbf{C} : P(z) = (z+1)(z+2)(z^2 + 2z + 2),$$

og dernæst ser vi, at

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -1 + i \lor z = -1 - i.$$

Hermed er alle rødderne i polynomiet $P$ fundet.

(3) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$.

**Løsning.** Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(*)$ er:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-t} \cos t + c_4 e^{-t} \sin t,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

(4) Godtgør, at differentialligningen $(*)$ er globalt asymptotisk stabil.

**Løsning.** Da alle de karakteristiske rødder har negativ realdel, er differentialligningen $(*)$ globalt asymptotisk stabil.

(5) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$.

**Løsning.** Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(**)$ er:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{-t} \cos t + c_4 e^{-t} \sin t + 3e^t,$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}$.

Vi betragter nu tredjegradspolynomiet $Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, som er givet ved forskriften

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : Q(z) = z^3 - z^2 + 25z - 25,$$

og differentialligningen

$$(***) \qquad \frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + 25\frac{dx}{dt} - 25y = 0.$$

(6) Vis, at tallet $\sigma_1 = 1$ er rod i polynomiet $Q$, og bestem dernæst de øvrige rødder i $Q$.

**Løsning.** Ved indsættelse af tallet 1 i polynomiet $Q$ ser man, at 1 er rod i dette polynomium, og ved polynomiers division finder man så, at

$$\forall\, z \in \mathbf{C} : Q(z) = (z-1)(z^2 + 25),$$

hvoraf det fremgår, at de to øvrige rødder er $\sigma_2 = 5i$ og $\sigma_3 = -5i$.

(7) Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$.

**Løsning.** Den fuldstændige løsning til differentialligningen $(***)$ er:

$$y = k_1 e^t + k_2 \cos(5t) + k_3 \sin(5t), \;\text{ hvor }\; k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{R}.$$

(8) Bestem den maksimale løsning til differentialligningen $(***)$, som også er løsning til differentialligningen $(**)$.

**Løsning.** Den søgte maksimale løsning er funktionen $y = 3e^t$.

**Opgave 2.** Vi betragter $3 \times 3$ matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

og vektordifferentialligningen

$$(\S) \qquad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}.$$

(1) Bestem egenværdierne og egenrummene for matricen $A$.

**Løsning.** Matricen $A$ har det karakteristiske polynomium $P_A(t) = -t^3 + 3t^2 + t - 3$, og vi ser, at tallet 1 er en rod i $P_A$. Desuden får vi dernæst, at

$$P_A(t) = (t-1)(-t^2 + 2t + 3),$$

hvoraf det følger, at de øvrige karakteristiske rødder er $-1$ og 3.

Dette viser, at matricen $A$ har egenværdierne $-1, 1$ og 3.

De tilhørende egenrum er

$$V(-1) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, V(1) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \text{ og } V(3) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(2) Bestem den fuldstændige løsning for vektordifferentialligningen $(\S)$.

**Løsning.** Den fuldstændige løsning for vektordifferentialligningen $(\S)$ er:

$$\mathbf{z} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{hvor } c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}.$$

(3) Bestem den specielle løsning $\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{z}}(t)$ til vektordifferentialligningen (§), så betingelsen $\tilde{\mathbf{z}}(0) = (2,1,5)$ er opfyldt.

**Løsning.** Vi finder, at

$$\tilde{\mathbf{z}} = 7e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2e^{3t}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Opgave 3.**

(1) Idet

$$\cos(4v) + i\sin(4v) = \Big(\cos v + i\sin v\Big)^4$$

(De Moivres formel for $n = 4$), skal man bestemme $\cos(4v)$ og $\sin(4v)$ udtrykt ved $\cos v$ og $\sin v$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$\Big(\cos v{+}i\sin v\Big)^4 = \Big((\cos v{+}i\sin v)^2\Big)^2 = \Big(\cos^2 v{-}\sin^2 v{+}2i\cos v\sin v\Big)^2 =$$

$$\Big(\cos^2 v - \sin^2 v\Big)^2 - 4\cos^2 v\sin^2 v + 4i\Big(\cos^2 v - \sin^2 v\Big)\cos v\sin v =$$

$$\cos^4 v{+}\sin^4 v{-}2\cos^2 v\sin^2 v{-}4\cos^2 v\sin^2 v{+}i\Big(4\cos^3 v\sin v{-}4\cos v\sin^3 v\Big),$$

hvoraf vi aflæser, at

$$\cos(4v) = \cos^4 v + \sin^4 v - 6\cos^2 v\sin^2 v,$$

og

$$\sin(4v) = 4\cos^3 v\sin v - 4\cos v\sin^3 v.$$

Lad tallet $z \in \mathbf{T} = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| = 1\}$ være vilkårligt valgt, og betragt følgen $(z_k)$, hvor $z_k = z^k$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$.

(2) Vis, at følgen $(z_k)$ har en konvergent delfølge med grænsepunkt $z_0 \in \mathbf{T}$.

**Løsning.** Torus'en $\mathbf{T}$ er en kompakt mængde, og da enhver følge på en kompakt mængde har en konvergent delfølge med grænsepunkt i den kompakte mængde, ser vi straks, at påstanden er sand.

**Opgave 4.** I spilteori betragter man et spil, som kaldes "Battle of the Sexes", og i dette spil indgår de to korrespondancer $F, G : [0,1] \to [0,1]$, som er givet ved forskrifterne

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{for } 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ [0,1], & \text{for } x = \frac{2}{3} \\ \{1\}, & \text{for } \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

og

$$G(y) = \begin{cases} \{0\}, & \text{for } 0 \leq y < \frac{1}{3} \\ [0,1], & \text{for } y = \frac{1}{3} \\ \{1\}, & \text{for } \frac{1}{3} < y \leq 1 \end{cases} .$$

(1) Vis, at korrespondancerne $F$ og $G$ begge har afsluttet graf egenskaben.

**Løsning.** Grafen for korrespondancerne $F$ og $G$ er afsluttede mængder i $\mathbf{R}^2$, hvilket godtgør påstanden.

(2) Vis, at ingen af korrespondancerne $F$ og $G$ er nedad hemikontinuerte.

**Løsning.** Lad os på intervallet $[0,1]$ vælge en følge $(x_k)$, hvor $x_k \neq \frac{2}{3}$ for ethvert $k \in \mathbf{N}$, men som er konvergent med $\frac{2}{3}$ som grænsepunkt. Vi bemærker nu, at der ikke findes nogen konvergent følge $(y_k)$ med $\frac{1}{2}$ som grænsepunkt, hvor $y_k \in F(x_k)$. Dette viser, at korrespondancen $F$ ikke er nedad hemikontinuert.

På tilsvarende måde indser man, at korrespondancen $G$ heller ikke er nedad hemikontinuert.

(3) Bestem en forskrift for den sammensatte korrespondance $H = G \circ F : [0,1] \to [0,1]$.

**Løsning.** Vi finder, at

$$H(x) = G \circ F(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y) = \begin{cases} \{0\}, & \text{for } 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ [0,1], & \text{for } x = \frac{2}{3} \\ \{1\}, & \text{for } \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases} .$$

Et punkt $(x^*, y^*) \in [0,1] \times [0,1]$ kaldes et ligevægtspunkt for parret $(F, G)$, hvis og kun hvis $x^* \in G(y^*)$ og $y^* \in F(x^*)$.

(4) Bestem ligevægtspunkterne for parret $(F, G)$.

**Løsning.** Vi ser, at ligevægtspunkterne for parret $(F, G)$ er: $(0,0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ og $(1,1)$.